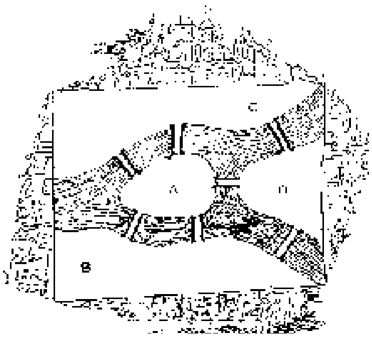
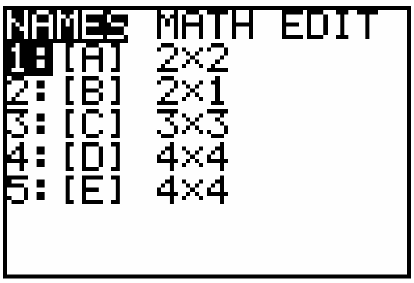
MATRICES

CON LA CALCULADORA GRÁFICA

TI 83

T³ España





Índice

1. MATRICES.
Objetivos

Las matrices son mucho más que una herramienta para el álgebra lineal. Esa es la tesis que defiende este capítulo. Actualmente se considera que las matrices constituyen un concepto útil para unificar una serie de técnicas y procedimientos de organización de datos y sirven para aplicar las matemáticas en muchos contextos significativos para estas edades. Desde 1985, el Instituto Freudenthal de Holanda ha realizado experiencias para su introducción en cursos que aquí corresponderían a la Educación Secundaria Obligatoria y al Bachillerato

La gran ventaja de las matrices es que resultan accesibles a la mayoría de los estudiantes de secundaria, los conceptos implicados no son excesivamente complejos frente a la gran cantidad de problemas que resuelven. Además, se pueden aplicar a la resolución de muchas situaciones de la vida real: biología, sociología, psicología, geografía, antropología, meteorología, economía, biología, informática y computación y, cómo no, a las matemáticas. Se aplican en todas las disciplinas tanto de las Ciencias Sociales como las Ciencias de la Naturaleza y también en las Artes. En todos estos campos es necesario un trabajo previo de modelización de la situación real y la interpretación de los resultados obtenidos. Este proceso abre el campo de las matemáticas

Algunos currículos de matemáticas en revisión han tomado el ejemplo holandés y lo están desarrollando, es el caso de los Estándares Curriculares de los Estados Unidos que han incluido en varios de sus Addenda Series la presentación de ejemplos que muestran cómo se puede llevar este cambio a las clases con situaciones prácticas, algunas de ellas se presentan en este documento.

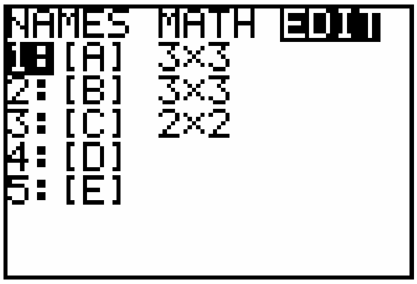
Las problemas propuestos parten de situaciones prácticas: análisis de grupos en sociología, evolución de poblaciones en biología, la codificación y descodificación de mensajes en criptografía, procesos de fabricación y comercialización, y también de otras partes de las matemáticas: probabilidad, geometría, teoría de grafos, álgebra lineal.

Estas situaciones-problema son las que sirven para la presentación de los conceptos. El trabajo de los estudiantes ya no será el de realizar las tediosas operaciones para multiplicar las matrices, una vez liberados de él, los estudiantes han de desentrañar las matemáticas que subyacen a los problemas planteados, darles solución y, lo que es más importante, integrar y relacionar conocimientos matemáticos que provienen de distintos campos de las matemáticas: álgebra, geometría, etc. pero esto no es más que lo que ocurre en la mayoría de los problemas reales.

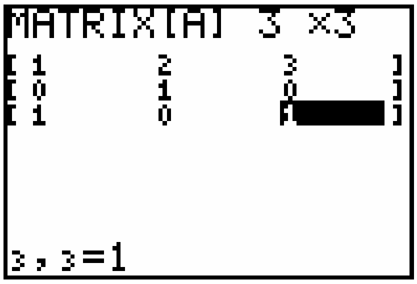
2. MATRICES EN LA TI83

Introducción de datos. Operaciones.

La introducción de datos en la calculadora TI83 se realiza a través de , opción EDIT. En este menú llamamos a una de las seis matrices que podemos definir mediante el número del **À** al **Ê** o con las flechas **}** , **†** y **Í** o pulsando directamente el número.



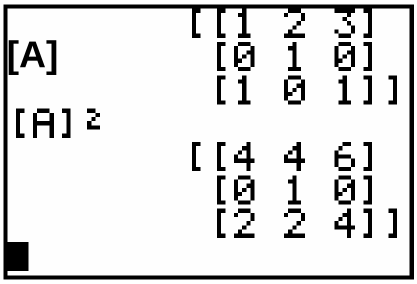
Una vez estamos en la edición de la matriz, primero introducimos las dimensiones (filas x columnas) con **Í** después de cada valor. Igualmente escribimos cada uno de los elementos de la matriz escribiendo las filas completas.



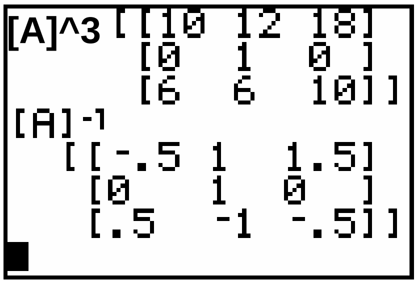
Durante este proceso podemos movernos de unos valores a otros con **|** **}** **†** **~**. Cuando acabemos, es necesario salir con **y** QUIT para volver a la pantalla de cálculos y resultados. Si no lo hacemos, la calculadora entenderá que queremos hacer operaciones en el último valor que hemos introducido en la matriz

Para mostrar en la pantalla la matriz que hemos introducido, escribimos NAMES, **À**: [A].

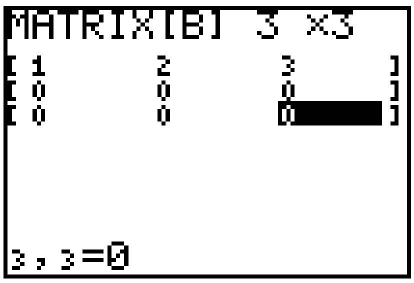
Podemos calcular el cuadrado de la matriz con [A] **¡** .



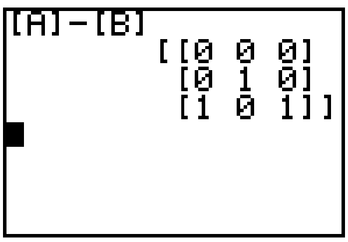
También calculamos el cubo: [A] **›** **Â**, la inversa con [A] **—**, o la opuesta con **Ì** [A].

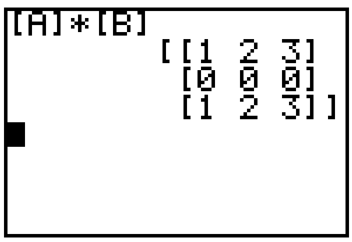


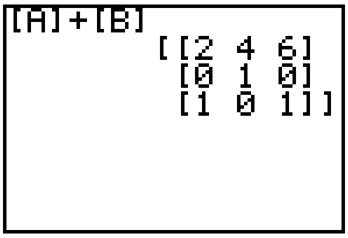
Introducimos una segunda matriz [B].



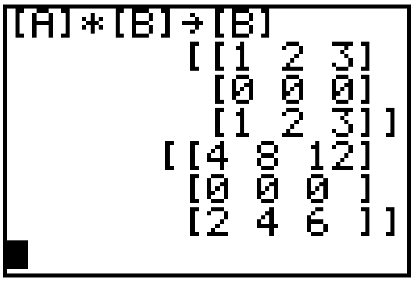
Calculamos ahora [A]+[B], [A]-[B], [A]*[B]:

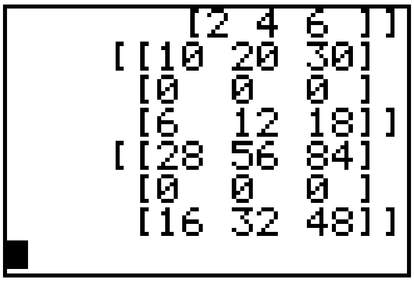




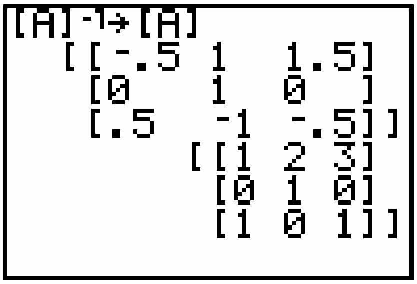


Para almacenar el resultado de una operación en otra matriz, escribimos [A]+[B] ¿ [C], si lo deseamos y las dimensiones de las matrices lo admiten, podemos almacenarlo en una de las que se han operado [A]+[B] ¿ [B], esto nos permite seguir realizando cálculos cuando lo que queremos es realizar el producto $[A]^n$ * [B]





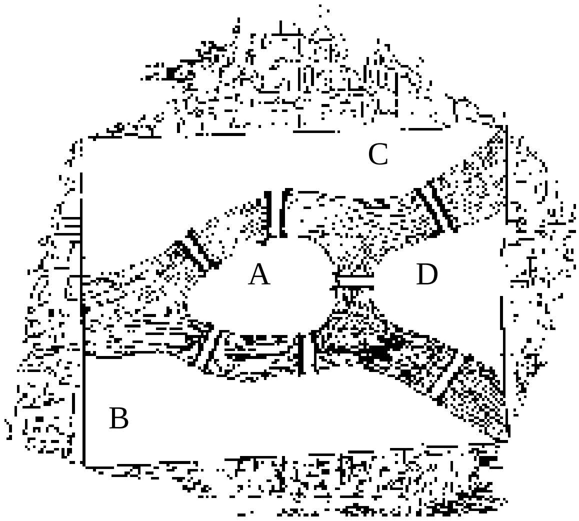
Si hacemos [A] — — ¿ [A], si pulsamos dos veces, es decir, realizamos la inversa de la inversa, vemos que nos sale la misma matriz.



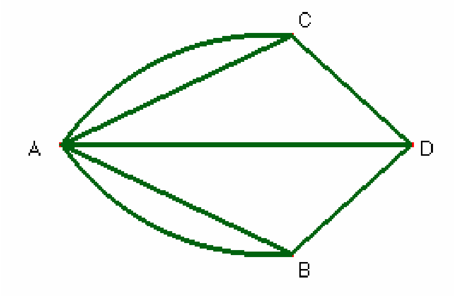
Para más información, ver el capítulo 10 del manual de la calculadora.

3. GRAFOS Y MATRICES
Potencia de una matriz

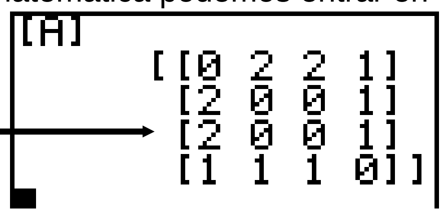
Un problema como el de los Puentes de Königsberg, además de marcar en su momento el inicio de la teoría de grafos, puede servir en la actualidad para introducir a los estudiantes en el estudio de matrices y en la operación potencia -producto-, de matrices. El planteamiento histórico del problema consiste en el intento de realizar un recorrido por todos los puentes que unen las dos orillas y las islas de la ciudad, con la condición de pasar una única vez por cada puente.



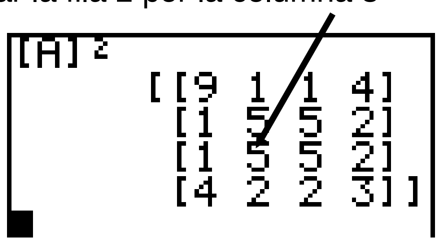
El plano de la zona puede ser sustituido por un diagrama o grafo que extraiga lo "esencial" del problema: dos regiones conectadas por un puente se representan por una línea que las une. De esta forma, como hay dos puentes que unen la isla A con la región C, dibujamos dos líneas de unión entre ellas, de la misma forma, sólo hay una línea entre C y D o ninguna entre B y C.



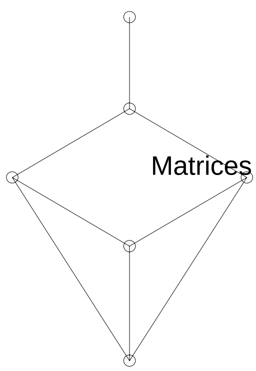
La resolución del problema -la ausencia de solución-, por el mismo Euler sacada de la revista anual de la Academia de San Petersburgo, se puede seguir en Newman (1969. Vol 4. pp 164-171). En matemática podemos entrar en nuevos derroteros si codificamos las líneas del grafo por números dispuestos en forma de matriz. El número 2 -fila 3, columna 1-, indica que hay dos formas de pasar de la región A a la C.

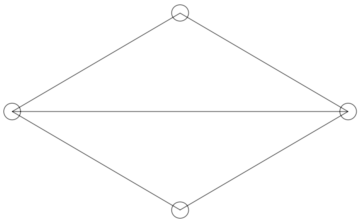


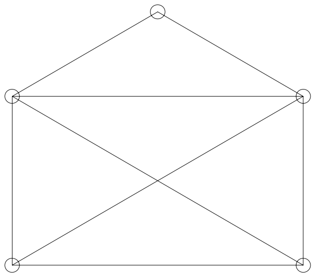
De aquí podemos pasar al cuadrado de una matriz y al producto de matrices: al multiplicar la fila 2 por la columna 3 (2x2+0x0+0x0+1x1 = 5) obtenemos el elemento a_{23} de M^2,número que tiene un *significado* dentro del problema que tratamos: "la cantidad de recorridos entre B y C pasando por dos puentes". De la misma forma estudiamos el cubo o la cuarta potencia de la matriz.



Aquí tenemos otros diagramas :

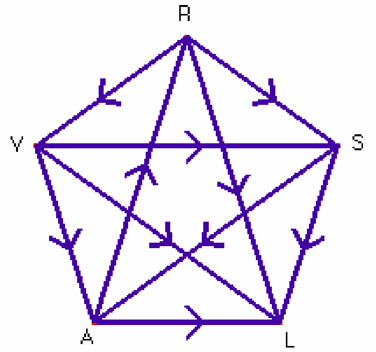






4. POTENCIA Y SUMA DE MATRICES
Estudio de las relaciones en grupos.

Podemos utilizar las matrices para analizar las relaciones dentro de un grupo. En este diagrama establecemos con una flecha la influencia que ejerce una persona sobre otra en un grupo de cinco: Ramón, Silvia, Luis, Alicia y Vicente.

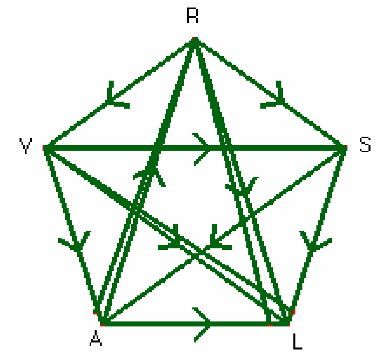


[A]

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} R & S & L & A & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} R \\ S \\ L \\ A \\ V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Es La matriz asociada en la que el 1 que aparece en la fila 3, columna 2 quiere decir que Silvia (col. 2) ejerce influencia sobre Luis (fila 3)

El cálculo del cuadrado de la matriz A tiene el significado que podemos ver en el diagrama de la derecha, la cantidad de influencias que ejerce cada uno de ellos hacia los demás, pero por medio de otra persona, es decir, serían influencias de segundo orden, es decir, han de realizarse por medio de otra persona.



[A]²

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} R & S & L & A & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} R \\ S \\ L \\ A \\ V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

El 2 que aparece en la fila 3, columna 5 son las dos relaciones de dominio que ejerce Vicente sobre Luis, una por medio de Alicia y otra con Silvia como intermediaria.

A^0 sería la matriz unidad, cada uno de ellos ejerce control sobre sí mismo, mientras A^3 reflejará el número de relaciones de dominio entre cada pareja del grupo con dos personas por medio. Sumamos ahora estas tres matrices. Después sumamos los números de cada columna y tenemos la cantidad de relaciones de dominio que un individuo ejerce sobre los demás, mientras que por filas tenemos las que ejercen sobre él.

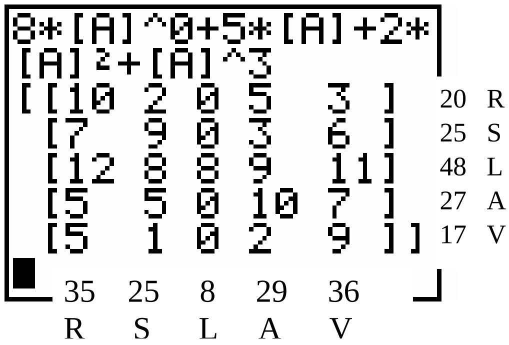
De esta forma nos encontramos que Ramón parece ser el líder ya que ejerce 15 relaciones de dominio, dos más que Vicente. Lo que ocurre es que si realizamos las sumas por filas, -los resulta-

[A]^0+[A]+[A]²+[A]^3

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 & R \\ 8 & S \\ 19 & L \\ 9 & A \\ 5 & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} 15 & 8 & 1 & 11 & 13 \\ R & S & L & A & V \end{matrix} & \end{array}$$

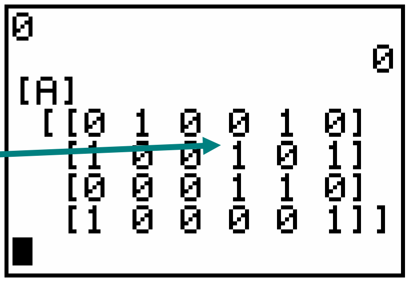
dos están a la derecha-, comprobamos que Vicente recibe dos relaciones de dominio menos que Ramón, lo cual nos lleva a pensar que el primero es más independiente.

Podemos introducir unos coeficientes que ponderen la influencia de las relaciones de dominio, multiplicar por 8 las relaciones de cada uno consigo mismo (la matriz identidad), por 5 las relaciones directas, las que se establecen persona a persona (la matriz de relaciones), por 2 las que se realizan con un intermediario (el cuadrado de la matriz) y por 1 las que se realizan con dos intermediarios interpuestos. (el cubo). Ahora Vicente no sólo es el más independiente (17 por 20 de Ramón), sino que también es el que más dominio ejerce en el grupo (36 por 35).



5. PRODUCTO DE MATRICES
Medicina. Contagio de enfermedades.

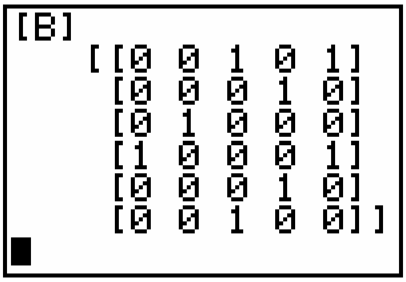
Cuatro personas de un grupo A (A_1, A_2, A_3 y A_4) que padecen una enfermedad contagiosa, ha estado en contacto con seis personas de un grupo B (B_1 a B_6). Estos contactos directos están representados por la matriz [A] en la que las filas representan a los miembros del grupo A y las columnas a los del grupo B



Donde a_{ij}=1 indica que la i-ésima persona del grupo A (A_i)ha estado en contacto con la j-ésima persona del grupo B (B_j)

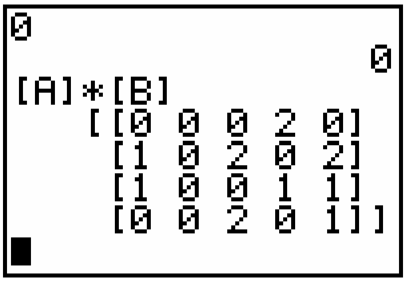
El elemento a_{24} indica si la persona B_4 ha estado en contacto (1) o no (0) con la persona infectada A_2.

Un tercer grupo C de cinco personas (C_1 a C_5). ha estado en contacto con el grupo B.



De la misma forma podemos representar los contactos mediante una matriz. [B] en la que los seis elementos del grupo B son las filas y los cinco del C son las columnas y cada elemento indica si un miembro del grupo B ha estado en contacto o no con el correspondiente del C y es posible que le transmita la enfermedad

En la fila 2 de la matriz [A] tenemos los contactos que A_2 ha mantenido con cada uno de los miembros del grupo B. En la columna 3 de la matriz [B] tenemos los contactos de los miembros de B con el la persona C_3. Cuando realizamos el producto (1x1+0x0+0x0+1x0+0x0+1x1=2) tenemos que C_3 tiene dos vías distintas de contagio de la enfermedad que ha padecido A_2 y le puede provenir de los contactos que A_2 ha mantenido con B_1 y con B_6.



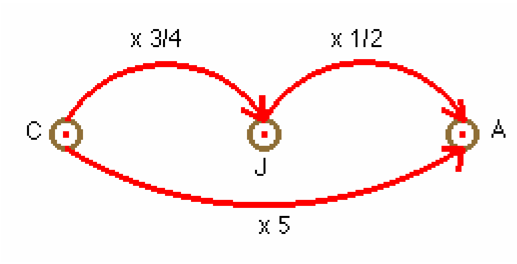
De la misma forma podemos analizar los otros productos de filas por columnas y llegar a la matriz producto en la que los cuatro miembros del grupo A serán las filas y los cinco del grupo C serán las columnas.

Ahora llega el momento de analizar esta matriz para extraer conclusiones. Si realizamos las sumas por filas resulta que A_1 ha podido transmitir la enfermedad de dos maneras distintas, A_2 la podía transmitir de 5 formas a 3 personas distintas y que A_3 y A_4 la han podido transmitir de 3 formas cada uno. En caso de disponer de una cantidad de tiempo (o de dinero) limitado para realizar una investigación sobre la transmisión de la enfermedad, el mejor candidato para dedicar nuestro esfuerzo es A_2 que es el que más posibilidades tiene de haberla transmitido.

De la misma forma podemos sumar las columnas y vemos que C_1 tiene dos formas distintas de haberse contagiado, Que C_2 no ha tenido la oportunidad de contagiarse y que las personas que más ha estado en contacto con la enfermedad son C_3 y C_5 con 4 contactos con miembros del grupo B que a su vez habían estado en contacto con miembros de A. Si sólo disponemos de dos vacunas, ellos deben ser los primeros en recibirlas.

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN VECTOR.
Evolución de poblaciones I. Los grillos

Las matrices de Leslie son muy utilizadas en biología para el estudio de la evolución de poblaciones. Vamos a analizar un problema sencillo como es la evolución de una colonia de grillos con unas condiciones de supervivencia y reproducción muy estrictas y lo relacionaremos después con la evolución de la población humana.

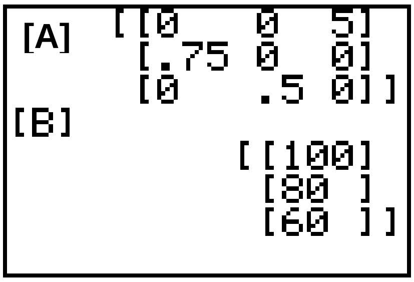


En una población de grillos, se sabe que de los que nacen, sobreviven los 3/4 al primer mes. De los que quedan, 1/2 sobrevive al segundo mes. Ninguno completa el tercer mes, pero los que han llegado dejan una descendencia media de 5 crias por adulto.

Si comenzamos con una población inicial de 100 crias, 80 individuos jóvenes y 60 adultos, podemos construir una tabla que refleje los primeros estadios sin más que realizar multiplicaciones .

	0	1	2	3
C	100	300	200	
J	80	75	25	
A	60	40	37	

A es la matriz de transformación, la que indica la parte de las crías que se convierte en jóvenes, la de jóvenes que pasa a adultas y las crías que nacerán de las adultas de ese mes. B es vector que representa la población inicial.



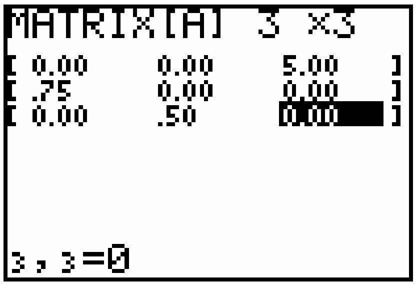
Aquí tenemos la evolución de dos poblaciones iniciales distintas a través del tiempo:

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 300 & 200 & 187.5 & 562.5 & 375 & 351.6 & 1054.7 & 703.1 & 659.2 & 1977.5 \\ 80 & 75 & 225 & 150 & 140.6 & 421.9 & 281.3 & 263.7 & 791 & 527.3 & 494.4 \\ 60 & 40 & 37.5 & 112.5 & 75 & 70.3 & 210.9 & 140.6 & 131.8 & 395.5 & 263.7 \end{pmatrix}$$

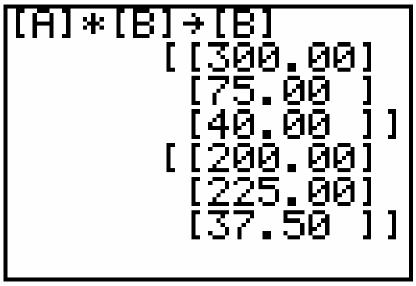
$$C = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 200 & 187.5 & 93.8 & 375 & 351.6 & 175.8 & 703.1 & 659.2 & 329.6 \\ 80 & 75 & 37.5 & 150 & 140.6 & 70.3 & 281.3 & 263.7 & 131.8 & 527.3 & 494.4 \\ 10 & 40 & 37.5 & 18.8 & 75 & 70.3 & 35.2 & 140.6 & 131.8 & 65.9 & 263.7 \end{pmatrix}$$

Con calculadora gráfica:

En primer lugar, es conveniente fijar en 2 el número de cifras decimales con la opción MODE (2ª línea), esto se hace para no arrastrar números innecesariamente largos.



Recordamos que para introducir los datos de las matriz [A] hacemos: , EDIT, **À**, declaramos la dimensión 3x3 y damos los valores una fila tras otra. Cuando hemos introducido la matriz es conveniente salir con **y** QUIT.



Si queremos calcular el producto de una matriz [A] (3x3) por un vector columna [B] (3x1), y volver a multiplicar la matriz por el vector resultante, podemos hacer como antes [A]*[B] **¿** [B], de esta forma, cada vez que pulsemos **Í** obtendremos un nuevo vector como resultado de multiplicar [A] por el anterior.

La forma de retener la información de los vectores que hemos ido obteniendo consiste en utilizar la operación *aumentar* con MATH 7:augment(. La secuencia de operaciones será:

1. Definir [A] como una matriz 3x3
2. Definir [B] como una matriz 3x1
3. [B] **¿** [C]. Almacena inicialmente [B] en la primera columna de [C].
4. [A]*[B] **¿** [B] Multiplicamos y guarda el resultado en B.
5. Augment ([C],[B]) **¿** [C]. Añade a C una nueva columna.

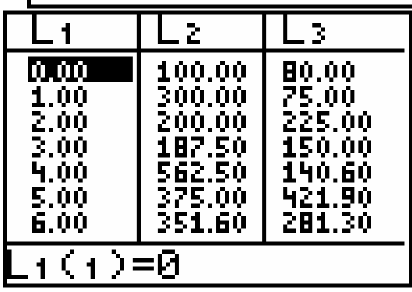
Es conveniente unir los pasos 4 y 5 en uno sólo separando las dos instrucciones con dos puntos, de esa forma, con sólo pulsar **Í** se calcularán las nuevas matrices B que se irán añadiendo como columnas a C. La instrucción será:

4 y 5. [A]*[B] **¿** [B] : augment ([C],[B]) **¿** [C].

Una vez hemos calculado tantas columnas como necesitamos (n), tenemos una matriz [C] con tres filas y n columnas. Con el fin de hacer la representación gráfica con más facilidad, es conveniente calcular su traspuesta y almacenarla en [D] para obtener una matriz con tres columnas. Recuperamos los resultados de la matriz [C] y los pasamos a las listas L_2, L_3 y L_4, cada una proviene de una columna con la instrucción matrlist:

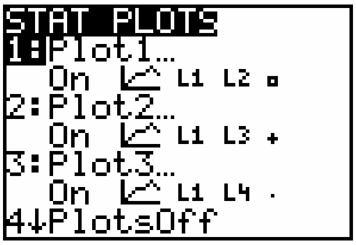
MATH 8:matrlist(matriz, lista, lista, lista)

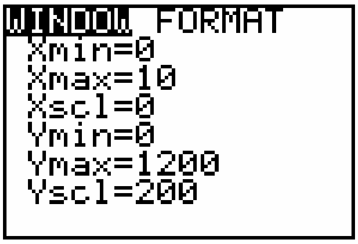
Hemos dejado libre la lista L_1 se introduce la secuencia de los números naturales

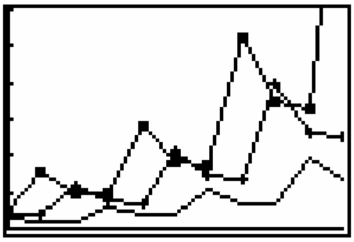


que indica los períodos de tiempo que transcurren) y que irá a ocupar el eje de abscisas en la representación gráfica de la evolución de un determinado grupo de edad en la población de grillos.

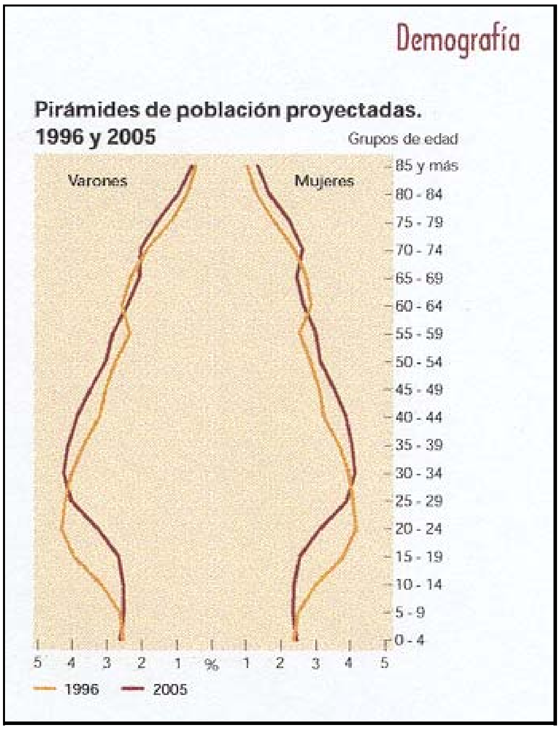
Por último, construimos un gráfico estadístico con los resultados obtenidos utilizando la listas L_2, L_3 y L_4 para el eje de ordenadas y una marca distinta para cada conjunto de puntos.



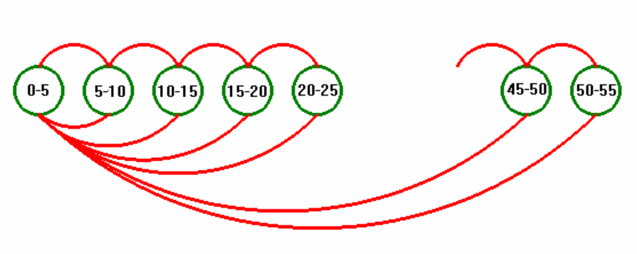




Aunque se ha utilizado un modelo simplificado, no dista mucho de la representación gráfica que se hace en las proyecciones de población humana con las pirámides de edad que se utilizan en geografía humana. Aquí tenemos un gráfico obtenido de las páginas de Internet del Instituto Nacional de Estadística en la que podemos ver la pirámide de la población española de 1996 en color claro y la previsión para el 2005 en color más oscuro.



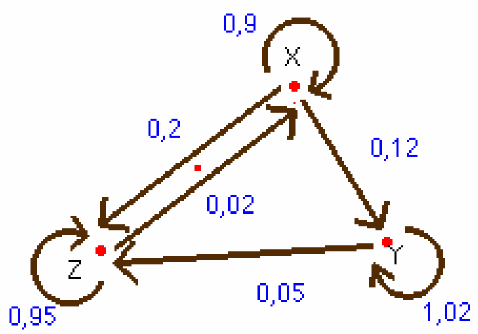
Los datos provienen de considerar un problema algo más complejo que el de los grillos, los estados no son Crías, Jóvenes y Adultos, sino grupos de edad de 5 en 5 años. Cada grupo tiene una probabilidad de supervivencia y otra de dejar descendencia. Su grafo sería algo parecido al de la derecha. Después habrá que añadir otros factores como las migraciones o los cambios sociales.



5. PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN VECTOR. Matrices de Leslie. Movimientos migratorios entre ciudades

Tenemos otro ejemplo interesante de la utilización de las matrices de Leslie en el estudio de las migraciones entre ciudades.

A la derecha tenemos el grafo de la relación entre tres ciudades X, Y y Z. Cada flecha indica la población que emigra de una ciudad a otra al cabo de un determinado periodo de tiempo -10 años en nuestro caso-. Por ejemplo, la ciudad Y se incrementará en un 2% en 10 años respecto de la que tiene ahora, además recibirá el 12% de la población que vive en X en estos momentos, mientras emigra el 5% de la suya hacia Z.



El análisis de esta situación hace que no sea muy distinta a la de la evolución de la población de grillos, sustituimos el paso de edad por la migración de una ciudad a otra. La matriz resultante tiene menos ceros que la anterior porque hay más flechas que transforman cantidades

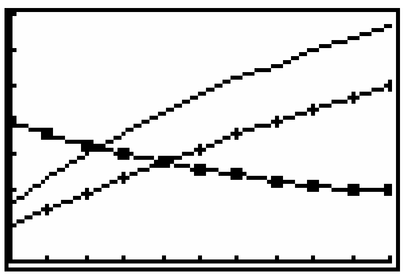
Si partimos de una población -en miles de habitantes-, de 200 en X, 50 en Y y 80 en Z, al cabo de 10 años la cantidad de habitantes de cada ciudad vendrá dada por el producto de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.02 \\ 0.12 & 1.02 & 0 \\ 0.2 & 0.05 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181.6 \\ 75 \\ 118.5 \end{pmatrix}$$

Con los métodos que hemos utilizado en el problema anterior y con la ayuda de la calculadora gráfica podemos calcular con rapidez la población de las tres ciudades al cabo de 10, 20, ... , 100 años

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
200	181.6	165.8	152.3	140.7	130.9	122.5	115.4	109.4	104.4	100.3
50	75	98.3	120.2	140.8	160.5	179.4	197.7	215.5	233	250.2
80	118.5	152.6	183.1	210.4	235.1	257.5	278.1	297.2	315	331.7

Y analizamos la evolución de estas poblaciones por medio de gráficas. Según las condiciones planteadas X disminuye su población, mientras Y y Z aumentan, aunque parece que la tendencia se suaviza con el tiempo.

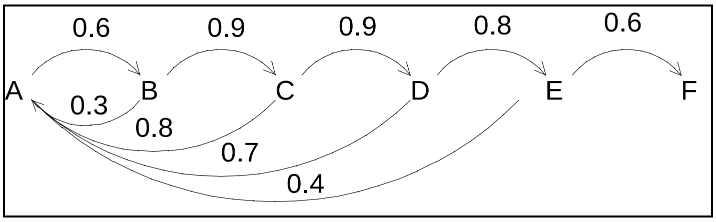


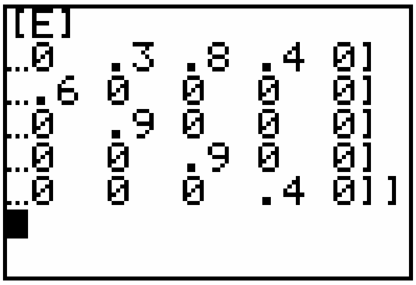
Otros problemas de evolución de poblaciones. Mamíferos

Una determinada población de mamíferos tiene una vida máxima de 18 meses y las transformaciones vienen dadas por la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F
Edad (meses)	0 a 3	3 a 6	6 a 9	9 a 12	12 a 15	15 a 18
Tasa nacimientos	0	0.3	0.8	0.7	0.4	0
Tasa supervivencia	0.6	0.9	0.9	0.8	0.6	0

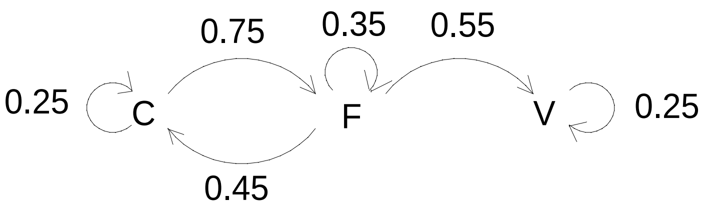
El diagrama y la matriz serían:

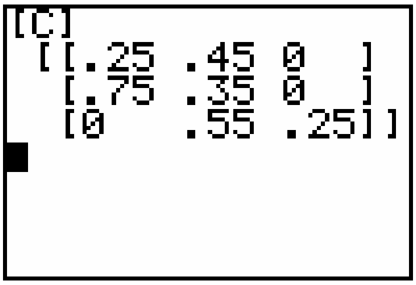




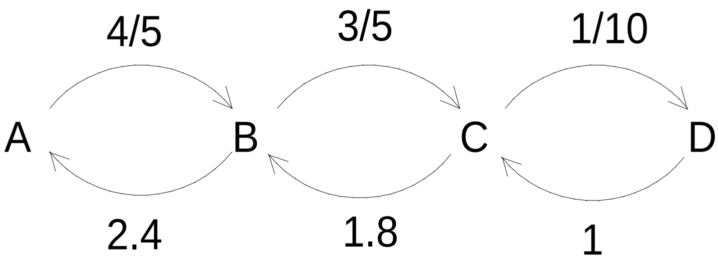
Las ratas.

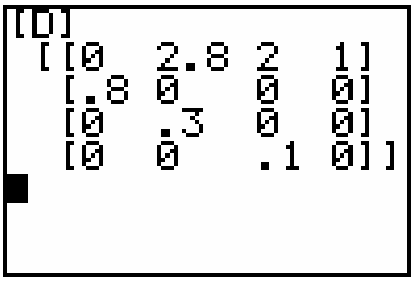
En una población de ratas, de las crías, el 25% permanece en ese estado y el 75% pasa a la edad fértil. De las fértiles, el 35% se queda en ese estado y el 55% pasa a la senectud y el 45% tiene una nueva cría. De las que pasan a la senectud únicamente sobrevive el 25%, pero ninguna de ellas llega a procrear.





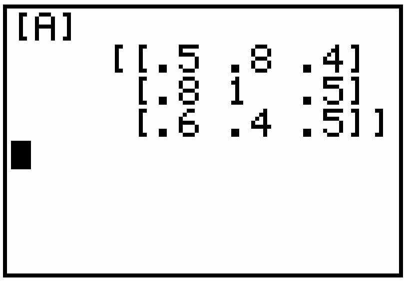
Inventa situaciones para:



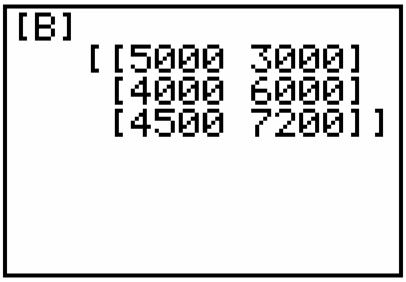


PRODUCTO DE MATRICES
Análisis de procesos de fabricación

Con esta actividad se considera la representación matricial de datos como herramienta que permite organizar un volumen importante de datos y se desarrolla la multiplicación de matrices en un contexto distinto al de 1-0 ya expuesto en el problema del contagio de enfermedades. Una idea importante que podremos extraer es que si la multiplicación se realizara de otra manera, las matrices tendrían muchas menos aplicaciones.



Una empresa juguetera fabrica tres tipos de animales de peluche : osos panda (Pa), canguros (Ca) y conejos (Co). Para producir un muñeco hace falta cortar cortar el material (Ct), coser (Cs) y realizar el acabado (Ac). La matriz [A] muestra el número de horas necesario en cada tipo de trabajo para cada muñeco.



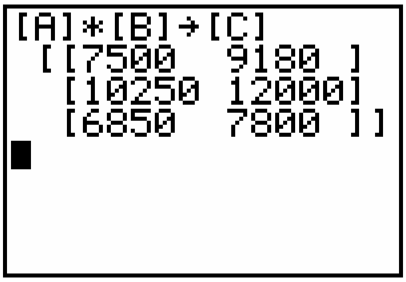
La fábrica ha recibido los pedidos para los meses de octubre y noviembre , en la matriz [B] se muestran la cantidad de muñecos de cada tipo que tienen que fabricar cada mes.

Para calcular el número de horas que se dedicará al cortado durante el mes de octubre, tenemos que multiplicar el número de horas de cortado de cada uno de los muñecos por el número de muñecos de cada clase que nos han pedido. La operación es la siguiente:

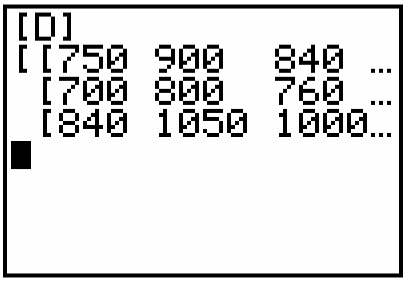
A*B

0.5	0.8	0.4	5000	0.5*5000	0.8*4000	0.4*4500	Suma
			4000	2500	3200	1800	**7500**
			4500				

De la misma forma podemos hacer el resto de multiplicaciones de filas de [A] por columnas de [B] para obtener la nueva matriz que nos da el número de horas de Cortado, Cosido y Acabado para realizar los pedidos de Octubre y Noviembre.



La empresa tiene tres fábricas: una en el norte (N), otra en el centro (C) y otra en el sur (S) del país. En la matriz [D] se dan los salarios que cobran por hora el trabajador de cada tarea (columna Cortado-Cosido-Acabado) en cada fábrica del país (fila N,C,S).

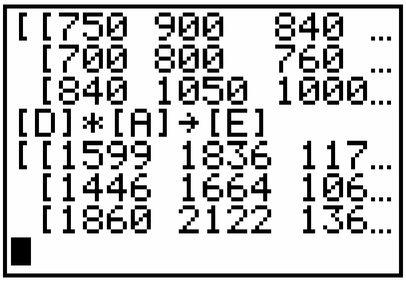


El producto de la fila de los salarios de la fábrica Norte por los tiempos de trabajo de cada tarea para fabricar un Canguro, nos da lo que cuesta producir el canguro en la fábrica Norte

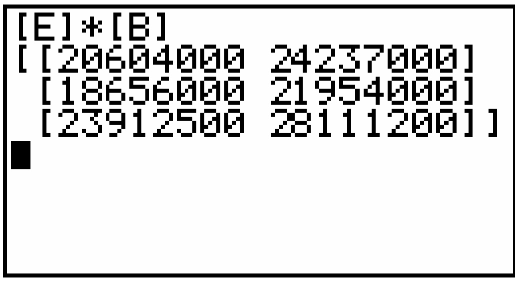
750	900	840		0,5	0,8	0,4
700	800	760		0,8	1,0	0,5
840	1050	1000		0,6	0,4	0,5

750x0,8 + 900x1,0 + 840x0,4 = 600+900+336 = 1836

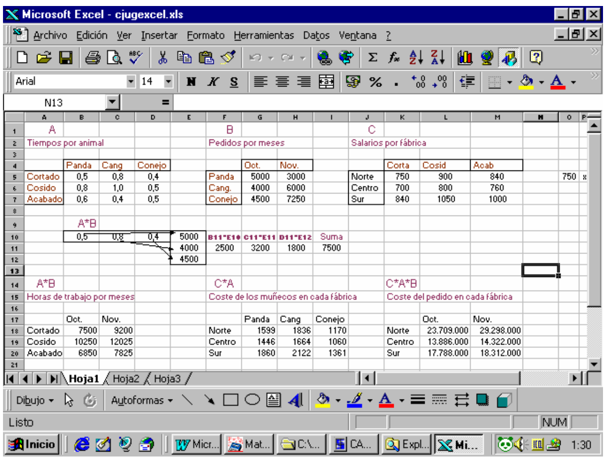
La matriz [D]*[A] nos da la matriz que indica el coste de cada muñeco en cada fábrica. Hacemos el producto y lo almacenamos en [E].



Para estudiar cuánto costará la fabricación del pedido de Octubre en la fábrica Sur: 1860 x 5000 + 2122 x 4000 +1361 x 4500 = 23 912 500 pesetas. De la misma manera, el producto de [E]*[B] nos da lo que nos costará la fabricación del pedido de cada mes en cada fábrica.



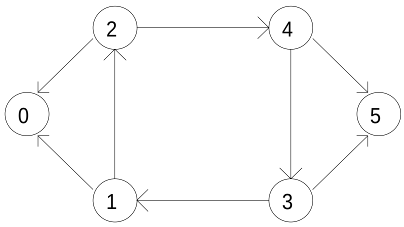
Este proceso también se podría haber realizado con una hoja de cálculo. El proceso de definición de las casillas con fórmulas es más tedioso, pero cuando se ha realizado, cualquier cambio se comprueba en instantes.



7. MATRICES EN PROBABILIDAD.
Cadenas de Markov. El jugador audaz.

Se consideran experiencias aleatorias con un número infinito numerable de resultados. Se estudian procesos aleatorios descritos por grafos (no por árboles) en situaciones dinámicas. Un proceso estocástico recorre en el tiempo una sucesión finita de estados y una serie de *transiciones* de unos estados a otros con una *probabilidad de transición* (la suma de las probabilidades de todas las flechas que parten de un estado es igual a 1). Un estado es *absorbente* cuando la suma de todas las probabilidades de las flechas que llegan a él es igual a 1.

El problema del juego audaz: Tengo 1 millón de pesetas y necesito urgentemente 5 millones. Puedo conseguirlos utilizando un juego limpio de azar. Mi estrategia será audaz: en cada jugada apuesto una cantidad de dinero tal que , en el supuesto de ganar, me acerque lo más posible a mi meta. Lo representaremos mediante el grafo de la derecha. Las probabilidades de transición son todas iguales a ½.

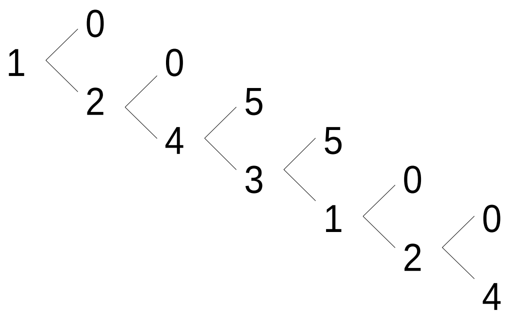


Es estudio mediante un diagrama de árbol es un proceso infinito y la probabilidad se obtendrá como una suma de infinitos términos:

$P = 1/2^3+1/2^4+1/2^7+1/2^8+ 1/2^{11}+1/2^{12}+ \ldots =$

$= (1/2^3)\ (1+1/2) + (1/2^7)\ (1+1/2) + (1/2^{11})\ (1+1/2) + \ldots= (3/2)\ (1/2^3+1/2^7+1/2^{11}+ \ldots) =$

$= (3/2)\ [(1/8)/(15/16)] = (3/2)\ (2/15) = 3/15$



Una forma de analizar este problema consiste en la idea de *masa crítica* que vendría a ser la consideración de que dos personas introducidas en el estado 1 millón, una de ellas se dirigirá hacia 0 y la otra hacia 2. Visto de esta manera, no tenemos más que introducir jugadores en el proceso y ver cómo caen en los estados absorbentes. En la tabla de la derecha vemos cómo, después de 18 transiciones, hemos tenido que introducir 16 personas, una sigue con 1 millón, 12 lo han perdido todo y 3 han conseguido su objetivo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0	1	1	2	3	3	4	4	5	6	6	6	7	7	8	9	9	10	10	11	12	12	12
1	2	0	2	0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0	2	0	0	0	1
2	0	1	1	2	0	0	1	1	2	0	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0
4	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

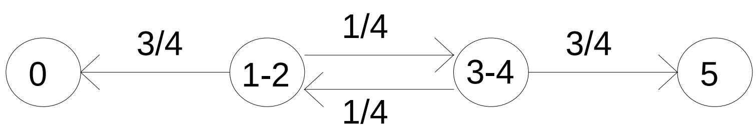
Si A es la matriz correspondiente al grafo del juego y [B] es el vector (0 1000 0 0 0 0)indica que vamos a introducir a 1000 jugadores audaces que dispones de un millón y necesitan urgentemente los cinco millones. El producto [A] * [B] nos da un nuevo vector que nos indica la disposición de los mil jugadores después de una transición. Aquí tenemos el resultado de estos mil jugadores después de 10 transiciones:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	500	750	750	750	781.3	796.9	796.9	796.9	798.8	799.8
1	1000	0	0	0	62.5	0	0	0	3.9	0	0
2	0	500	0	0	0	31.3	0	0	0	2	0
3	0	0	0	125	0	0	0	7.8	0	0	0
4	0	0	250	0	0	0	15.6	0	0	0	1
5	0	0	0	125	187.5	187.5	187.5	195.3	199.2	199.2	199.2

Si introducimos a 16 jugadores audaces, es decir, tomamos la matriz columna (0 16 0 0 0 0), después de 4 transiciones obtenemos el resultado anterior sin más que realizar el producto de matrices y almacenarlo en la matriz columna: [A] * [B] ↵ [B]. Al pulsar ENTER, tenemos la situación de los distintos estados a través del tiempo.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	8	12	12	12
1	16	0	0	0	1
2	0	8	0	0	0
3	0	0	0	2	0
4	0	0	4	0	0
5	0	0	0	2	3

El grafo del inicio se puede reducir, ya que los estados 1 y 2 tienen muchas semejanzas, los agrupamos en uno de forma que, cuando caigan en él cuatro jugadores, tres se arruinarán y uno pasa al estado 3-4 así como los estados 3 y 4. Con ello cambia el diagrama y las probabilidades de transición.




```
[E]
 [[1  .75 0    0]
  [0  0    .25 0]
  [0  .25 0    0]
  [0  0    .75 1]]
```

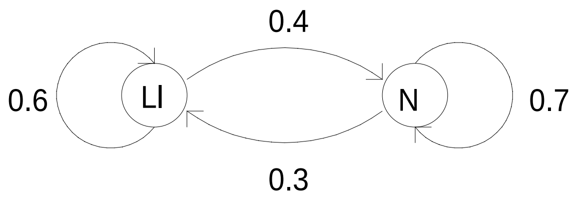
Con esta matriz asociada. Las matrices que indican el número de personas inmersas en el proceso son 4x1 , las que hemos estudiado anteriormente se convierten en:

(0 1000 0 0)
(0   16   0 0)

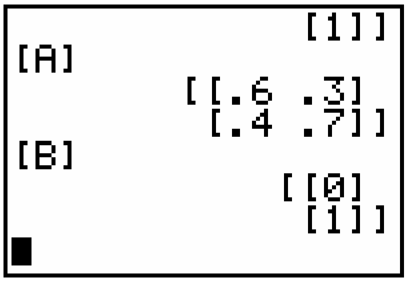
Cadenas de Markov II.
Meteorología. Predicción del clima.

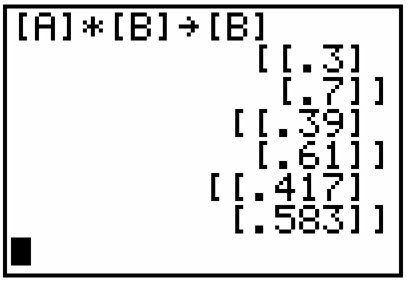
En muchas situaciones aleatorias, podemos utilizar matrices para representar probabilidades y las operaciones con matrices sirven para prever acontecimientos futuros.

Predicción del tiempo: Según los datos sobre el clima de una determinada zona, al 60% de los días de lluvia le sigue otro día lluvioso, y que a un 30% de los días en que no llueve le sigue un día en que sí.



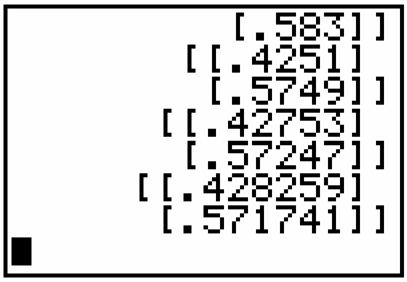
La matriz [A] indica las probabilidades de cambio de estado, mientras en [B] se ha representado la situación "hoy lunes no ha llovido".





De la misma manera, la previsión para el martes y el miércoles se consigue al realizar el producto [A] * [B] ¿ [B] para realizar la multiplicación repetidamente. De esta forma sabemos que el miércoles hay un 61% de probabilidad de que llueva.

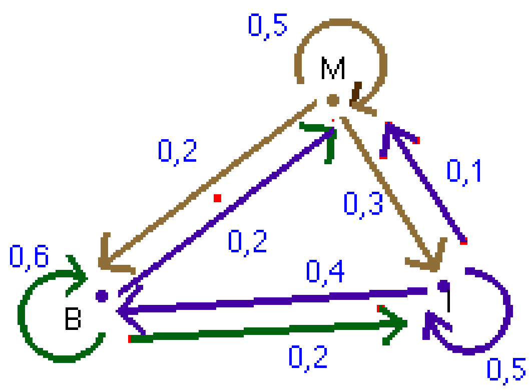
Al repetir estos cálculos para 2, 3, 4, … , n días futuros, vemos que la proporción de días en que lloverá converge rápidamente hacia un valor . ¿Ocurriría igual si hoy lunes hubiera llovido (1,0)?.



Se puede hacer un estudio parecido al que se ha hecho con los grillos o con las migraciones entre ciudades y ver cómo en pocos días la probabilidad de que llueva o no se estabiliza en una cantidad que es precisamente el porcentaje de días lluviosos o secos de esa zona.

Este problema se puede complicar con el enunciado siguiente en el que se distinguen tres estados: según los datos que tenemos sobre el clima de una determinada zona, se han clasificado los días en buenos, (B), indiferentes (I) o malos (M).

Si hoy hace Bueno, mañana también lo será con probabilidad de

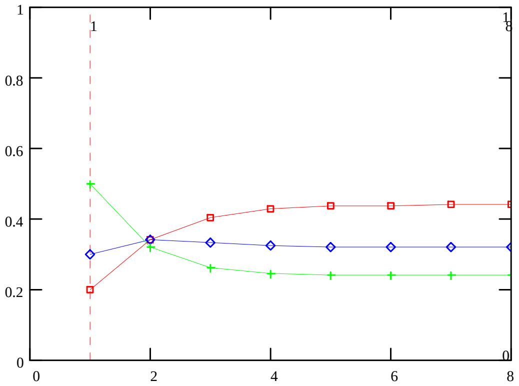


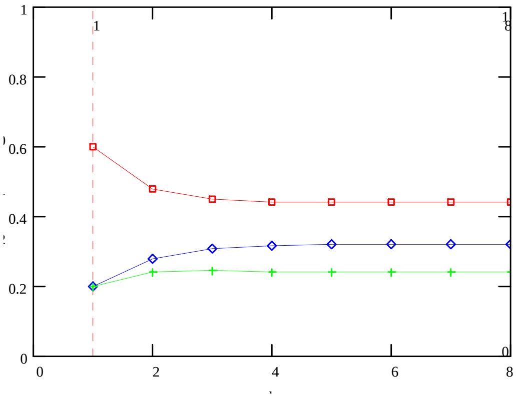
0.6, indiferente con probabilidad 0.2 y malo con 0.2.

Si hoy ha sido Indiferente, las probabilidades de que sea B, I o M son 0.4, 0.5 y 0.1.

Si el clima ha sido malo las probabilidades son 0.2, 0.3 y 0.5 respectivamente.

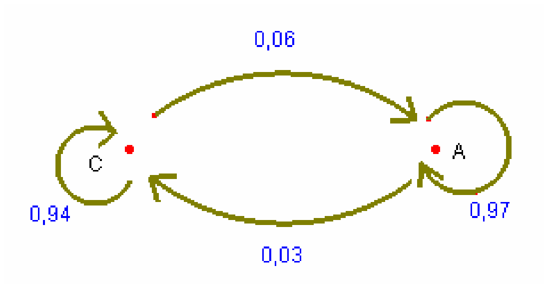
En este caso la probabilidad de que el día salgo bueno, malo o indiferente también se estabiliza con rapidez independientemente del tiempo que haya hecho un día determinado como lo muestran los gráficos en los que la probabilidad de que el día sea bueno está marcada por la línea roja, el que sea malo con la verde y la indiferente con la azul. En la gráfica de la izquierda se parte de un día malo y en la de la derecha de un día bueno





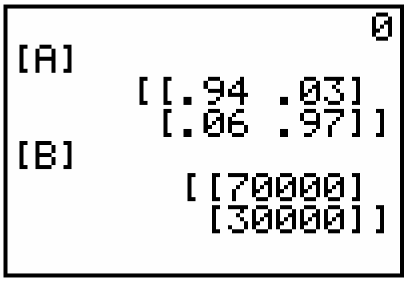
Urbanismo. Predicción de movimientos ciudadanos.

Propiedad de la vivienda (A. Quesada): En un estudio reciente, se ha encontrado que cada año que pasa, el 6% de los habitantes del centro de la ciudad se trasladan a vivir a las afueras, mientras que el 3% de los que viven en las afueras, vuelven a vivir al centro.

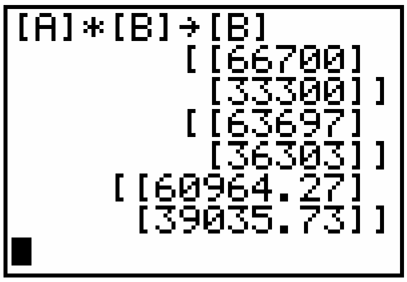


La población actual es de 100 000 personas, 70 000 viven en el centro y 30 000 en las afueras.

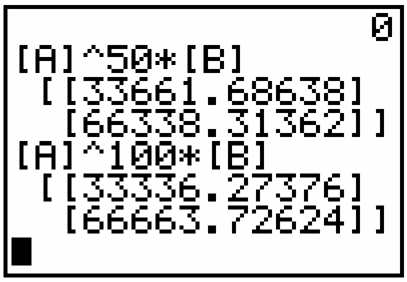
[A] es la matriz que sirve para hacer las transformaciones y, si nos fijamos, tiene una característica común con la de la predicción del tiempo, los elementos de cada columna suman la unidad, es decir es una matriz de probabilidad. [B] es la matriz que indica el estado inicial o punto de partida de la situación.



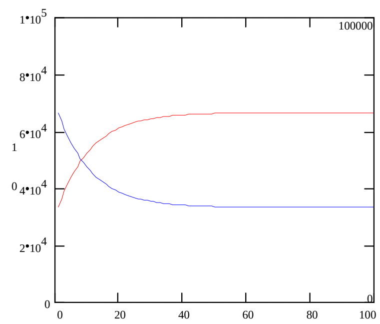
El producto [A]*[B] nos da la población en el centro y en las afueras al cabo de un año y si repetimos el proceso iremos obteniendo la evolución de la población a lo largo de los años.



También podemos calcular la población en cada zona dentro de 50 y 100 años, aunque hay que tener en cuenta que la matriz B ha sido modificada, primero hay que restaurarla con los valores iniciales y hacer los cálculos de la derecha.



Vemos que llega un momento en que la población tiende a estabilizarse alrededor de un valor que corresponde a 33 333 personas en el centro y 66 666 en los alrededores.



Aquí tenemos el gráfico de la evolución de la población. Lo que ocurre es que da igual la distribución de la población de partida, al cabo del tiempo se estabilizará en este vector fijo de la matriz de probabilidad. Además el 6% de 33 333 es igual al 3% de 66 666 personas, es decir la cantidad de personas (2000) que pasa del centro a las afueras es la misma que se dirige en sentido contrario.

8. INVERSA DE UNA MATRIZ. DETERMINANTES. Criptografía.

El código más sencillo para cifrar mensajes consiste en la sustitución de las letras del alfabeto por números.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**

Este código transforma la palabra DICE por 4 9 3 5 y los colocamos en forma de matriz [B] y enviamos el mensaje cifrado correspondiente a 17 33 10 19.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 33 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}$$

El destinatario recoge 17 33 10 19 y lo escribe en forma de matriz y la multiplica por el descifrador [D] que le hemos dado previamente para obtener [B].

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 33 \\ 10 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Para cifrar una frase se organiza en paquetes de cuatro letras completando el último grupo, si es preciso, con letras que no modifiquen el mensaje, y se envían los paquetes transformados en el mismo orden en que se obtienen. Si al cifrar o descifrar se obtienen números grandes o negativos, nos quedamos con los números del 1 al 27 que se obtienen al restar o sumar los múltiplos de 27 necesarios.

MATRIZ INVERSA.

Si A es una matriz cuadrada, que hemos utilizado como cifradora , la matriz descifradora la obtenemos encontrando una que verifique [A] * $[A]^{-1}$ * [B] = $[A]^{-1}$ * [A] *[B] = [B], es decir, [A] * $[A]^{-1}$ = $[A]^{-1}$ * [A] = [I], la matriz identidad. Para obtener $[A]^{-1}$ empezamos por cambiar los elementos de la diagonal por su opuesto y cambiar el signo de aquellos de los otros (viene a coincidir con la adjunta de la traspuesta).

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero esto no siempre funciona, ya que en muchos casos, obtenemos una matriz con el mismo número en todos los términos de la diagonal. La matriz inversa se encontrará dividiendo cada elemento de la adjunta de la traspuesta por 10 = 4*3 - 2*1 que es precisamente el determinante de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

9. ÁLGEBRA LINEAL.
Resolución de sistemas de ecuaciones.

Las calculadoras gráficas complementan la presentación tradicional de los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas con la interpretación geométrica de los resultados.

Para los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas el método de reducción permite una interesante introducción al método de Gauss cuando sustituimos una ecuación por un múltiplo de ella o por una combinación lineal de ella y otra con el fin de hacer ceros .

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 9 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

$$\underset{[A]}{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} * \underset{[X]}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{[B]}{\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

En el sistema, en el caso de que $[A]^{-1}$ exista, podemos obtener la solución del producto de $[A]^{-1}$ * [B]. Esto vendría a sustituir el método de Cramer. En el caso de que como resultado de una operación, algunos de los elementos son muy pequeños, podemos reducirlos a 0 con el paso de [A] > Frac para cambiar sus elementos a fracciones.

Si [A] es una matriz inversible, pero sus elementos son casi iguales a los de una matriz singular [B], el error de redondeo puede hacer difícil el cálculo de $[A]^{-1}$. Es el caso de los sistemas:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 11 \\ 4.9975\,x + 6y &= 33 \end{aligned}$$

Sol. (-8800 , 7335.16)

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 11 \\ 4.99\,x + 6y &= 33 \end{aligned}$$

Sol. (-2200 , 1835.16)

Lo que ocurre es que en ambos casos se trata de rectas casi paralelas y que pequeñas modificaciones de la inclinación de una de ellas, provoca un desplazamiento muy grande en el punto de corte.

Podemos comparar estos dos sistemas con este otro que es incompatible.

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 11 \\ 5x + 6y &= 33 \end{aligned}$$

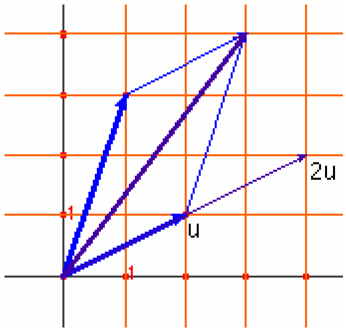
Otros sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= -2 \\ -x + 8y - 27z &= 0 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ -x + 3y + z &= 3 \\ x + y - 5z &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ x + 3y + 5z - w &= 47 \\ 2x + 3y + 4z + w &= 46 \\ 3x + 5y - 7z + w &= 7 \end{aligned}$$

10. OBTENER MATRICES EN CIERTAS CONDICIONES. Movimientos en el plano.



Dados dos vectores u = (2 , 1) y v = (1, 3), podemos realizar la suma u+v = (2+1 , 1+3). Geométricamente se hace con la regla del paralelogramo. De la misma manera, si k es un número y u es un vector, ku es otro vector de la misma dirección cuyo módulo es k veces mayor.

Una transformación se puede ver como el resultado de multiplicar una matriz por el vector columna que indica sus coordenadas.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} * \underset{u}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{u'}{\begin{pmatrix} X' \\ y' \end{pmatrix}} \qquad \underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} * \underset{u}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \underset{u'}{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Por ejemplo:

Si deseamos realizar una transformación determinada, podemos realizar el ejercicio que consiste en buscar la matriz transformadora.

Movimiento	Transforma	En	Matriz asociada
Simetría respecto del eje x (y=0)	x y	x -y	1 0 0 1
Simetría respecto del eje y (x=0)	x y	-x y	-1 0 0 1
Simetría respecto del eje y=x	x y	y x	0 1 1 0
Simetría respecto del eje y=-x	x y	-y -x	0 -1 -1 0
Traslación de vector (a , b)	x y	a+x y+b	
Semejanza de razón r	x y	rx rb	
Giro de 90º	x y	y -x	0 1 -1 0
Giro de 180º	x y	-x -y	-1 0 0 -1
Giro de 270º	x y	-y -x	0 -1 -1 0
Giro de 360º	x y	x y	0 1 1 0

Giro de αº	x y		$\begin{matrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{matrix}$

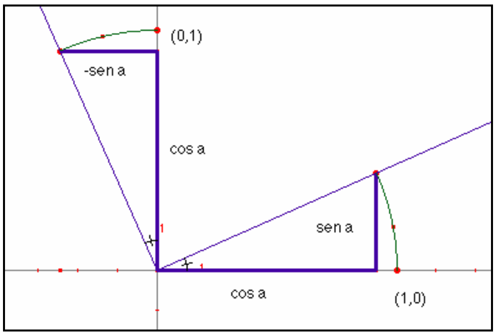
En general, para obtener la matriz de un movimiento. Se aplica a dos puntos - los más sencillos son (1,0) y (0,1) y se obtienen sus imágenes, por ejemplo, para la simetría de eje y=x

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí tenemos las ecuaciones a=0 ; b=1 ; c=1 ; d=0 es decir, la matriz que se ha expuesto anteriormente en la tabla.

Para un giro de αº, tenemos que (1,0) se transforma en ($\cos\alpha$, senα) y que (0,1) se transforma en (-senα , $\cos\alpha$).



La matriz asociada será:

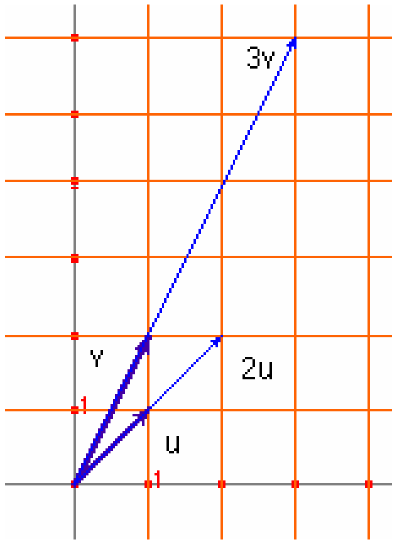
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

11. INVESTIGACIONES

Valores y vectores propios.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la siguiente operación matricial, el vector (1 , 2) se transforma en un múltiplo de él mismo. Esto quiere decir que el vector se transforma en otro de la misma dirección . Podemos estudiar si hay otros vectores de este tipo para esa matriz.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

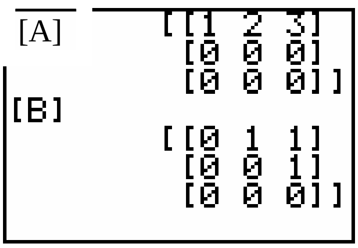
$$\left.\begin{aligned} x + y &= kx \\ -2x + 4y &= ky \end{aligned}\right| \qquad (1-k)x + y = 0$$

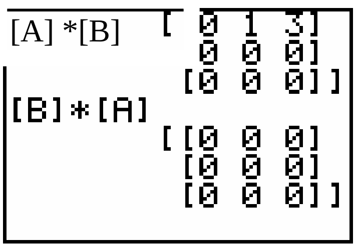
De aquí tenemos dos soluciones para k:
K=3 ; y = 2x, es decir, los vectores (x , 2x)
K=2 ; y =   x, es decir, los vectores (x , x)

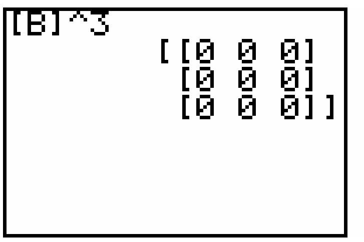
Propiedades: conmutatividad y divisores de cero

Un pirata que podía levantar hasta 3 quintales de peso, escucha de su capitán lo siguiente: “Tienes cinco minutos. Haz lo que puedas, el oro está en la bodega. Hay 5 cofres y cada uno pesa 2 quintales”. El pirata baja rápidamente a la bodega, pero cuando está en ella, descubre que el capitán se ha equivocado, pues lo que había eran dos cofres que pesaban 5 quintales cada uno. Intenta levantarlos una y otra vez, pero ¡ay!.

¿Es cierto que 2x5?. Según la historia del pirata, parece que todo depende del significado de la palabra igual.







Con esto tenemos un ejemplo de no-conmutatividad del producto de matrices. Además tenemos dos matrices no nulas cuyo producto es la matriz nula, es decir, una prueba de la existencia de divisores de cero.

Cuadrados. Encuentra las matrices 2x2 tales que, su cuadrado sea igual a la matriz en la que cada elemento sea igual al de la inicial elevado al cuadrado.

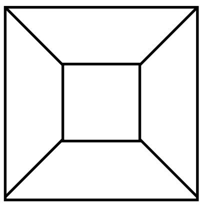
12. LAS MATRICES EN MATEMÁTICAS

12.1 Las matrices en el currículo.

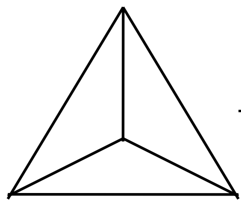
La mayoría de los libros de texto dedican muy poco tiempo a la introducción y a las ideas que subyacen a las matrices y sus operaciones. Normalmente definen matriz como una disposición rectangular de números y, tras un ejemplo de matriz, pasan a la colección de definiciones de matrices iguales, matriz fila, columna, nula, cuadrada, diagonal, etc., para desembocar, por lo general, en lo que parece el único fin de las matrices: el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Este planteamiento olvida la génesis de un concepto matemático como los grafos que reúne una serie de características que lo hacen especialmente interesante en la educación secundaria:

* Extiende sus raíces en problemas clásicos de las matemáticas.
* Son útiles para comprender mejor una situación. Sirven para confeccionar y perfeccionar esquemas que simplifiquen y esquematicen situaciones reales, ya que nos quedamos con lo "esencial" con lo que contribuyen en gran medida a crear destrezas de resolución de problemas matemáticos.
* Resaltan los elementos comunes y los diferenciadores de distintas situaciones.
* Se utilizan en otras partes de las matemáticas, en geometría los diagramas de Schelegel de los poliedros (lo que se vería si el poliedro estuviera construido con varillas y nos acercamos mucho a una cara).



Cubo



Tetraedro

*Transmiten a los estudiantes la sensación de trabajar en algo práctico y concreto.

12.2 El papel de las calculadoras gráficas.

Este tratamiento se encontraba hasta ahora con la dificultad de necesitar excesivo tiempo para la realización de unos cálculos demasiado elementales para el momento en que se realizaba el estudio de las matrices -el último de la secundaria y previo a la universidad-.

La introducción de las nuevas tecnologías, y en especial de las calculadoras gráficas, posibilita dos cosas: que podamos realizar esos cálculos casi automáticamente y, lo que es más importante, que se pueda adelantar la introducción de las matrices como forma de representación de situaciones de muy diverso tipo. Este es un planteamiento que ha tenido su origen en J. de Lange y la escuela de O.W.&O.C. y que comienza a tener gran incidencia en los currículos en revisión como es el caso de los Estándares del N.C.T.M.

Algunos campos de aplicación de las matrices

La representación matricial de datos ofrece grandes ventajas al matemático que resaltan de manera especial en el momento del aprendizaje ya que se ponen de manifiesto las conexiones con el mundo real especialmente ser una forma eficiente de organizar un gran volumen de datos.

MEDICINA	
Daltonismo.	Matriz de distancias entre colores
Contagio enfermedades	Multiplicación de matrices
SOCIOLOGÍA y PSICOLOGÍA	
Liderazgo de grupos	Polinomio de matrices.
Predicción comportamiento	Cadenas de Markov
GEOGRAFÍA	
Confección de planos	Matriz de distancias
Movimientos migratorios	Matrices de Leslie
Matrices de conectividad	Potencia y suma
ARTE	
Deformación de imágenes	Operaciones y transformaciones geométricas
ARQUEOLOGÍA	
Catalogación excavaciones	Matrices de Robinson de distancias.
METEOROLOGÍA	
Predicción del tiempo	Cadenas de Markov
ECONOMÍA	
Transportes	Polinomio de matrices.
Procesos de fabricación	Producto de matrices.
Comunicaciones	Polinomio de matrices.
Gestión de empresas	Operaciones con matrices
BIOLOGÌA	
Evolución de poblaciones	Matrices de Leslie
TRANSMISIÓN DE LA INFORMACIÓN	
Critografía	Producto. Inversa
INFORMÁTICA Y COMPUTACIÓN	
Gráficos	Matrices de puntos
Juegos de ordenador	Movimientos en los simuladores.

MATEMÁTICAS	
Topología	Estudio de grafos
Probabilidad	Cadenas de Markov
Teoría de colas	Cadenas de Markov
Sistemas dinámicos	Multiplicación y potencia de matrices
Geometría	Transformaciones geométricas
Sistemas de ecuaciones	Operaciones. Inversa

13. Bibliografía:

Barnett, S. (1990). Matrix. Methods and applications. Oxford applied mathematics.
Benson et all (1994). Networks. Cambridge University Press.
Chiang, A. (19987). Métodos fundamentales de economía matemática. Mc Grawn Hill. Madrid
Caballero, P. y Castañeda, C. (1994). Uso didáctico de la criptografía: La administración de secretos. Revista Suma. Núm. 19. pp 59-64. F.E.S.P.M. Madrid.
Coxford, A.F. (1991). Geometry from multiple perspectives. Addenda Series. N.C.T.M.
de Lange, J. (1989). Matrices. (en "Las matemáticas en la E.S. Materiales del O.W.&O.C. editado por el I.C.E. de la U. de Salamanca.
Engel, A. (1988). Probabilidad y Estadística. Vol. 2. (Mestral : Valencia)
Espinel Febles, M.C. (1994). El lenguaje de los grafos. Revista Suma. Núm. 16. pp 19-28. F.E.S.P.M. Madrid.
Espinel Febles, M.C. (1994). El lenguaje de los grafos en los problemas de redes de comunicación. Revista Suma. Núm. 18. pp 32-38. F.E.S.P.M. Madrid.
Froelich, G.W. (1993). Conexiones matemáticas. Addenda Series. N.C.T.M. (Traducido por la S.A.E.M. Thales: Sevilla).
Grossman (1992). Álgebra lineal con aplicaciones. Mc Grawn Hill. México.
Kolman, B. (1997). Introductory Linear Algebra with applications. Ed Prentice Hall.
Grossman (1994). Aplicaciones de álgebra lineal. Mc Grawn Hill. México.
Keitel, C. (1997). Matemáticas y realidad en clase Ed. Graó. Barcelona.
Lang, S. (1977). Álgebra. Ed. Aguilar. Madrid
Lipschutz, S. (1992). Álgebra lineal. Mc Grawn Hill. Madrid.
Martínez Mediano, J. et al (1994). Matemáticas para las Ciencias Sociales. Mc Grawn Hill. Madrid.
Matthews, G. (1969). Matrices. 2 vols. (Vicens Vives: Barcelona).
Meiring. S. (1992). A core curriculum. Addenda Series. N.C.T.M.
Newman, J.R. (1969). Enciclopedia Sigma del Mundo de las Matemáticas. 7 vols (Grijalbo: Barcelona).
Pollack-Johnson & Frederick (1997): Mathematical connections. A modeling approach to Business calculus. Edición preliminar. The Villanova Project.
Quesada, A. (1994). El impacto de las Calculadoras Gráficas en la enseñanza de Aplicaciones Matriciales a nivel Preuniversitario. Actas de las VII J.A.E.M. pp. 151-155. (S.E.M. "Emma Castelnuovo".: Madrid)
Sydsaeter, K y Hammond, P. (1996). Matemáticas para el análisis económico. Ed. Prentice Hall. Madrid.
Tortosa Grau, L. (1995). La calculadora gráfica. Una herramienta para resolver un problema de evolución de especies. Revista Suma. Núm. 20. pp 85-90. F.E.S.P.M. Madrid.

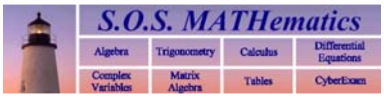
Matrices en Internet

Chryptography Internet Project.

http://gauss.hawcc./hawaii.edu/maths/crypt.htm

Máquina codificadora Enigma

S.O.S. Mathematics



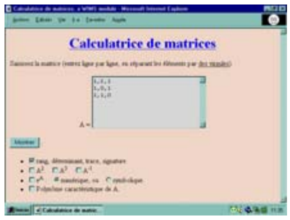
http://www.math.utep.edu/sosmath/matrix/matrix.html

Matrices de Leslie

Juan Luis Corcobado Cartes

http://personal.redestb.es/corcobado/leslie.html

Calculatrice de matrices



Lugar de internet donde introducimos una matriz por filas y nos devuelve la operación deseada.

http://wims.unice.fr/

Historia de las matemáticas.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistoryTopics.html

Math Archives.

http://archives.math.utk.edu/topics/linearAlgebra.html

Math 308F Home Page. Chris Hillman

http://www.math.washington.edu/~hillman/308.html

I Hate the Linear Algebra

http://students.vassar.edu/~wilee/linear.html

Math Forum. Math Forum - Linear Algebra
http://forum.swarthmore.edu/linear/linear.html