EXAMEN 2º A MAT. APLIC. CC.SS. II
23-04-06

SOLUCIONES (Salvo error u omisión)

Ejercicio nº 1.-

Como la población de partida es normal, las medias muestrales también se distribuyen según una normal, para cualquier valor de n. La desviación típica de la población es

$$\sigma = \sqrt{36} = 6.$$

En este caso, las edades medias de las muestras siguen una distribución $N\left(38\ ;\ \frac{6}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $N\,(38;\ 1{,}5)$.

El intervalo característico es de la forma:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\quad \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 99%, tenemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(38 - 2{,}575 \cdot \frac{6}{\sqrt{16}};\quad 38 + 2{,}575 \cdot \frac{6}{\sqrt{16}}\right);\ \text{es decir:}$$

$$(34{,}14;\ 41{,}86)$$

Ejercicio nº 2.-

La expresión que nos da el error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Sabemos que $E = \frac{314{,}8 - 295{,}2}{2} = 9{,}8$ días.

Como no conocemos σ, tomamos $s = 40$ días. Además, sabemos que $n = 64$ bombillas.

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$9{,}8 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{40}{\sqrt{64}} \;\rightarrow\; 9{,}8 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{40}{8} \;\rightarrow\; 9{,}8 = z_{\alpha/2} \cdot 5 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = \frac{9{,}8}{5} = 1{,}96 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Sabemos que a este valor de $z_{\alpha/2}$ le corresponde un nivel de confianza del 95%.

Ejercicio nº 3.-

La proporción de diabéticos, *pr*, en muestras de 300 individuos, sigue una distribución normal de media $p = 0{,}02$ y de desviación típica:

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{300}} \approx 0{,}008$$

Es decir, *pr* es una *N* (0,02; 0,08).

Ejercicio nº 4.-

Queremos estimar la proporción en la población, *p*, mediante una muestra de tamaño 40.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}};\quad pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \right)$$

Para el 90% de confianza, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El valor de *pr* es el de la proporción obtenida en la muestra: $pr = 0{,}2$. Por tanto, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}2 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{40}};\quad 0{,}2 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{40}} \right);\ \text{es decir :}$$

(0,096; 0,304)

Ejercicio nº 5.-

a) Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales siguen una media $\mu = 30$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9}$. Es decir se distribuyen $N\left(30;\ \frac{5}{9}\right)$.

b) Como sabemos que $\bar{x}$ se distribuye $N\left(30;\ \frac{5}{9}\right)$, si z es $N(0,1)$, tenemos que:

$$P[\bar{x} > 31] = P\left[z > \frac{31-30}{5/9}\right] = P[z > 1{,}8] = 1 - P[z \leq 1{,}8] = 1 - 0{,}9641 = 0{,}0359$$

Ejercicio nº 6.-

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Además, sabemos que $\sigma = \sqrt{144} = 12$ cm y que $E = 2$ cm.

Sustituimos en la expresión anterior y despejamos n:

$$2 = 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 12}{2} = 11{,}76 \rightarrow n = 138{,}2976$$

El tamaño de la muestra ha de ser de, al menos, 139 individuos.

Ejercicio nº 7.-

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr(1-pr)}{n}}$.

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El error máximo que admitimos es $E = 0,05$.

Para pr tomamos el valor del estudio anterior, es decir, $pr = 0,3$.

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}05 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}} \rightarrow n \approx 322{,}69$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 323 personas.

Ejercicio nº 8.-

a) Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media $\mu = 127$ y de desviación típica

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{24}{\sqrt{25}} = \frac{24}{5} = 4{,}8. \text{ Es decir, se distribuyen } N(127;\ 4{,}8).$$

b) Como sabemos que $\bar{x}$ es $N(127;\ 4{,}8)$, si z es $N(0,\ 1)$, tenemos que:

$$P[126{,}5 < \bar{x} < 128] = P\left[\frac{126{,}5 - 127}{4{,}8} < z < \frac{128 - 127}{4{,}8}\right] = P[-0{,}10 < z < 0{,}21] =$$

$$= P[z < 0{,}21] - P[z < -0{,}10] = P[z < 0{,}21] - P[z > 0{,}10] = P[z < 0{,}21] - (1 - P[z \leq 0{,}10]) =$$

$$= 0{,}5832 - (1 - 0{,}5398) = 0{,}123$$